TRIGONOMETRÍA
ESFÉRICA

QUE DISPUSO

DON ANTONIO GABRIEL

FERNANDEZ

MAESTRO DE MATEMATICAS QUE FUE

DE LA REAL ACADEMIA DE GUARDIAS

MARINAS DE CADIZ.

Y SE REIMPRIME PARA USO DE LA MISMA

COMPAÑIA.

EN MURCIA:

En la Imprenta de la VIUDA de Teruél.

TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Trigonometría esférica es la ciencia que enseña á resolver los triángulos esféricos. Esta se divide como la rectilinea en rectángula y obliquangula. La rectángula trata de los triángulos esféricos rectangulos, y la obliquangula de los triángulos obliquangulos. Esta parte de trigonometría es de grande utilidad en las facultades de esfera, geografía, nautica y astronomía.

DEFINICIONES FIG. 1.

1 Circulo maxîmo en la esfera, es aquel cuyo plano pasa por el centro de la esfera, y asi tiene el mismo centro que la esfera y comun diámetro con ella: de donde se infiere que los maxîmos, ABCD, AECF, se cortan por medio en A y C, porque siendo G centro comun de la esfera y maxîmos, y por consiguiente AGC diámetro comun serán ABC, AEC &c. semicirculos.

Po-

2 Polos de un circulo maxîmo son los puntos de la superficie de la esfera igualmente distantes de la circunferencia del circulo, como los puntos, A y C son polos del maxîmo BEDF, porque los arcos BA, AE, AD y asimismo CB, CE, CD, son quadrantes de los circulos maxîmos que constan de 90 grados y por consiguiente son iguales.

3 Angulo esférico es el que se forma en la superficie de la esfera con dos arcos de circulo maxîmo como BAE. Este ángulo es igual al de la inclinacion de los planos de los circulos sobredichos, y su medida es el arco BE, cuyo polo es el punto A, ó C; y asi, BE tambien es medida del ángulo BCE.

De aqui se infiere lo primero, que los ángulos opuestos BAE, BCE que distan un semicirculo, son iguales, porque tienen la medida comun EB. Lo segundo: los ángulos vecinos BAE, EAD, son tanto como dos rectos, porque sus medidas BE, ED componen el semicirculo BED que consta de 180 grados, valor de dos ángulos rectos. Lo tercero: los ángulos verticales opuestos BAE, FAD, son tambien iguales; porque si de los dos semicirculos iguales EBF, BFD se quita el arco comun BF, quedarán BE, FD iguales, que son medida de los ángulos BAE, FAD.

4 Triángulo esférico es el que se forma en la superficie de la esfera con tres arcos de circulo maxîmo. Su denominacion es la misma que la del triángulo rectilineo: si tiene un ángulo recto se llama rectángulo: si un ángulo obtuso, obtusangulo:

y

y si los tres ángulos, son agudos, acutangulo. Dicesé equilátero, si los tres lados son iguales: isóceles, si dos lados son iguales; y escaleno, si los tres lados son desiguales.

CAPITULO I.

DE LAS PROPIEDADES DE LOS triángulos esféricos.

PROPOSICION I. TEOREMA.

Si dos triángulos esféricos tienen dos lados del uno iguales á dos lados del otro, y los ángulos comprebendidos iguales: ó si la base del uno es igual á la base del otro y los ángulos adyacentes son iguales, los triángulos serán totalmente iguales.

Esta proposicion corresponden á la 27 de la seccion 8 de la Geometria Elemental, y á la primera parte de la 28 de la misma seccion, porque hecha la sobreposicion se ajustarán perfectamente.

PROPOSICION II. TEOREMA.

En el triángulo esférico isóceles, los ángulos sobre la base son iguales: y si los ángulos sobre la base son iguales, el triángulo es isóceles.

Esta proposicion se demuestra por el corolario 1 y 2 de la proposicion 25, S. 7 de la Geometría tria Elemental. Infierese de aqui que el triángulo equilátero es equiángulo, y al contrario.

PROPOSICION III. TEOREMA.

Si dos triángulos esféricos tienen los tres lados del uno iguales á los tres lados del otro cada uno á su correspondiente, los triángulos serán totalmente iguales.

¶ Demuestrase como la 26 de la (S. 8 G. Elem.)

PROPOSICION IV. TEOREMA.

En qualquier triángulo esférico ABC, *dos lados* BA, BC *son mayores que el tercero* AC. (fig. 2.)

DEMOSTRACION.

La distancia mas breve en la superficie de la esfera del punto A al punto C, es el arco del circulo maxîmo AC, luego otra qualquier distancia ABC será mayor: luego los dos lados juntos son mayores que el tercero AC.

PRO-

PROPOSICION V. TEOREMA.

En qualquier triángulo esférico ABC. *al mayor ángulo* C *se opone el mayor lado* AB, *y al contrario.* (fig. 7).

DEMOSTRACION.

1 Hagase el ángulo BCD igual al ángulo B, y serán (prop. 2.) DB, DC iguales: pero (p. 4.) CD, DA juntos son mayores que AC: luego DB con DA, ó AB, es mayor que AC.

2 Si los ángulos B y C fueran iguales, los lados AB, AC (p. 2.) serían iguales. Y si C fuera menor que B, AB (1. p.) sería menor que AC: luego si AB es mayor que AC, el ángulo C es mayor que B.

PROPOSICION VI. TEOREMA.

En qualquier triángulo esférico ABC, *un lado es menor que el semicirculo, y los tres lados son menores que el circulo entero* (fig. 2.)

DEMOSTRACION.

1 Continuese BA, BC hasta que concurran en D, y serán (def. 1.) BAD, BCD semicirculos: luego tanto AB como CB son menores que el semicirculo. Lo mismo se demuestra de AC.

En

2 En el triángulo ADC, los lados DA, CD (p. 4.) son mayores que AC: pero DA, DC con AB, CB, componen (def. 1.) los semicirculos DAB, DCB: luego los tres lados AB, BC, AC son menores que el circulo entero.

PROPOSICION VII. TEOREMA.

En el triángulo esférico ABC, *si los lados* AB, AC *juntos son iguales al semicirculo, los ángulos sobre la base* BC *son iguales á dos rectos: si dichos lados son mayores que el semicirculo, los ángulos sobre la base serán mayores que dos rectos; y si menores, los tales ángulos serán menores que dos rectos, y al contrario* (fig. 2.)

¶ Alarguense BA, BC hasta que concurran en D.

DEMOSTRACION.

Lo primero por ser AB, AC (por suposicion) y BA, AD (def. 1.) iguales al semicirculo, AC, AD serán iguales: luego (prop. 2.) el ángulo ACD es igual al ángulo D, esto es (def. 3.) al ángulo B. Pero los ángulos ACB, ACD son iguales á dos rectos: luego ACB, y B serán iguales á dos rectos. Al contrario: si el ángulo ACD, fuere igual al ángulo B, y por consiguiente los ángulos BCA y B fueren tanto como dos rectos, serán los ángulos ACD y D iguales, y (p. 2.) los lados AC, AD serán iguales; pero AB, AD son (def. 1.) un semicir-

cu-

culo: luego AB, AC son iguales al semicirculo.

Lo segundo, si AB, AC son mayores que un semicirculo, será AC (consta de lo dicho) mayor que AD: luego el ángulo D, opuesto al mayor lado, ó su igual B es (p. 5.) mayor que el ángulo ACD: pero ACD y ACB son iguales á dos rectos: luego ACB y B son mayores que dos rectos.

Al contrario: Si ACD es menor que el ángulo B, ó los ángulos ACB y B son mayores que dos rectos, será el ángulo ACD menor que D, y (p. 5.) el lado AC mayor que AD: y como BAD sea semicirculo, los lados AB, AC serán mas que semicirculo.

La tercera parte con su inversa se demuestra del mismo modo.

COROLARIO.

De lo demostrado en esta proposicion consta, que en un triángulo esférico el ángulo externo puede ser igual, menor, ó mayor que el ángulo interno opuesto.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

En el triángulo isósceles ABC, *los ángulos sobre la base son de la especie de los lados opuestos, y al contrario.* (fig. 3.)

Sean los lados AB, AC quadrantes: digo que los ángulos B y C son rectos.

DEMOSTRACION.

Porque los lados AB, AC son iguales al semicirculo, los ángulos B y C juntos son (p. 7.) tanto como dos rectos: y siendo (p. 2.) iguales, es forzoso sean rectos.

Al contrario: Siendo los ángulos B y C rectos, los lados AB, AC son iguales al semicirculo: y siendo estos (p. 2.) iguales, es preciso sean quadrantes.

Del mismo modo se demuestra por la segunda parte, que si los lados AB, AC son mayores que quadrantes, los ángulos B y C son obtusos, y al contrario: y por la tercera parte, si los lados AB, AC son menores que quadrantes, los ángulos B y C serán agudos; y al contrario.

COROLARIOS.

1 En los triángulos equiláteros los ángulos son de la especie de los lados, y al contrario; porque qualesquiera dos lados son iguales: luego todos los ángulos serán de la especie de sus lados.

2 Los arcos de los maxîmos que pasan por los polos de otro maxîmo, hacen con él ángulos rectos; y al contrario: porque siendo AB, AC quadrantes, será A (def. 2.) polo del arco BC, y los ángulos B y C rectos como está demostrado; y al contrario: si dos ángulos B y C son rectos, los arcos AB, AC serán quadrantes, y (def. 2.)

A polo de BC. De aqui es tambien que si B es ángulo recto, y BA quadrante, será A polo de BC, y AC asimismo quadrante.

PROPOSICION IX. TEOREMA.

En qualquier triángulo esférico ABC, *prolongado un lado* BC, *el ángulo externo* ACD *es menor que los dos internos opuestos* A y B, *y los tres ángulos son mayores que dos rectos, y menores que seis* (fig. 4.)

Esto es manifiesto, quando el ángulo externo ACD es igual ó menor que el ángulo interno opuesto B.

Sea pues el ángulo externo ACD mayor que el ángulo interno opuesto B: hagase el ángulo ECD igual al ángulo B, y alargase BA hasta que concurra con CE y CA hasta F.

DEMOSTRACION.

Por ser el ángulo ECD igual à B, serán los ángulos ECB y B iguales á dos rectos, (p. 7.) y los lados EB, EC juntos, iguales al semicirculo: luego los lados EA, EC serán menores que el semicirculo: luego (p. 7.) el ángulo externo EAF, y por consiguiente su vertical opuesto BAC, será mayor que ACE: luego los dos ángulos B y BAC son mayores que los dos ACE, ECD, ó que el externo ACD, que es lo primero.

Lo

Lo segundo: porque siendo el ángulo externo ACD menor que los ángulos internos en A y B, si á una y otra parte se añade el ángulo ACB, quedarán los tres ángulos internos mayores que los ángulos ACD, ACB: pero estos son (def. 3.) iguales á dos rectos; luego los tres ángulos internos son mayores que dos rectos.

Lo tercero, porque los tres ángulos internos de un triángulo con los tres externos (def. 3.) componen seis rectos, se sigue que los tres internos solos son menores que seis rectos.

COROLARIO.

De lo dicho se infiere, que un triángulo esférico puede tener tres ángulos rectos, dos rectos y un obtuso, dos obtusos y un recto; y tres obtusos.

PROPOSICION X. TEOREMA.

En el triángulo rectangulo, los lados que comprehende el ángulo recto, son de la especie de sus ángulos opuestos, y al contrario (fig. 5.)

Sean los triángulos CAB, DAB, EAB rectangulos en A, y sea el ángulo ABD recto, y será el ángulo ABC agudo, y ABE obtuso.

DEMOSTRACION.

En el triángulo DAB porque los ángulos DAB, DBA; son rectos, los lados DA, DB (p. 8.) serán quadrantes: luego el lado CA, que se opone al ángulo agudo CBA, es menor que el quadrante AD, y el lado EA, opuesto al ángulo obtuso ABE, es mayor que el quadrante AD: luego qualquier lado de los que comprehende el ángulo recto es de la especie de su ángulo opuesto.

Lo contrario se infiere de lo dicho.

PROPOSICION XI. TEOREMA.

En qualquier triángulo rectangulo, si los ángulos obliquos, ó lados de los que comprehenden el ángulo recto son de una especie, la hypotenusa será menor que el quadrante; y si son de diferente especie, la hypotenusa será mayor que el quadrante.

Digo lo primero: que si cada uno de los lados AB, BC (fig. 6.) del triángulo ABC rectangulo en B es menor que el quadrante, la hypotenusa AC será menor que el quadrante.

Prolonguense los lados AB, BC hasta cumplir los quadrantes AD, BF, y tirese el arco FD que corte á la hypotenusa AC alargada en E.

DE

DEMOSTRCAION.

Porque el ángulo B es recto, y BF es un quadrante, el punto F será (c. 2. p. 8.) polo del arco BD y el ángulo D recto; y porque DA es un quadrante, el punto A, será polo del arco DE y AE (def. 2.) será quadrante: luego la hypotenusa AC es menor que el quadrante.

Asimismo, si cada uno de los lados AB, BC (fig. 2.) del triángulo ABC, rectangulo en B, es mayor que quadrante, la hypotenusa AC es menor que un quadrante: porque en el triángulo opuesto DAC el ángulo D es recto por ser igual (def. 3.) á B, y cada uno de sus lados AD, CD (def. 1.) es menor que el quadrante: luego por lo demostrado, la hypotenusa AC, que es comun á uno y otro triángulo, es menor que el quadrante.

Digo lo segundo, que si el lado BG del triángulo CBG, rectángulo en B, (fig. 6.) es mayor que el quadrante y CB menor, la hypotenusa CG es mayor que el quadrante: porque en el triángulo opuesto ABC, los lados AB, BC, que comprehenden el ángulo recto B, son menores que quadrantes: luego por la primera parte de esta p, la hypotenusa AC, es menor que el quadrante y su complemento al semicirculo CG, (que es la hypotenusa del triángulo opuesto CBG.) es mayor que el quadrante.

Tambien si los dos ángulos obliquos son de una misma especie, la hypotenusa será menor que el

qua-

quadrante, y mayor si los tales ángulos son de diferente especie, porque por la (p. 10.) estos ángulos son de la misma especie que los lados opuestos.

ESCOLIO.

Esta proposicion no habla del triángulo rectangulo cuyos lados, ó á lo menos uno de ellos sea quadrante; porque si los dos lados que comprehenden el ángulo recto son quadrantes, el tercer lado, ó hypotenusa será tambien quadrante (def. 3.) por ser medida del ángulo recto, y si un lado del ángulo recto es quadrante, la hypotenusa tambien lo será (cor. 2. p. 8.) y si la hypotenusa es quadrante, un lado tambien lo será.

PROPOSICION XII. TEOREMA.

En el triángulo esférico obliquangulo ABC, *si los ángulos sobre la base son de una especie, la perpendicular tirada del ángulo vertical á la base cae dentro del triangulo; y fuera, si dichos ángulos sobre la base son de diferente especie.*

Lo primero, sean los ángulos B y C (fig. 12.) agudos, digo que el perpendiculo AD, cae dentro del triángulo BAC, porque si cayera fuera, por oponerse al ángulo agudo B y al obtuso ACE, (p. 10.) sería menor y mayor que quadrante, lo que es absurdo; luego cae dentro. Lo mismo se demuestra quando los ángulos son obtusos.

Lo segundo, sean los ángulos B y C (fig. 13.)

de

de diferente especie; esto es B agudo, C obtuso, digo que el perpendiculo AD cae fuera del triángulo BAC, porque si cayera dentro, por oponerse al ángulo agudo B y al obtuso ACB, sería (p. 10.) menor y mayor que quadrante; lo que es absurdo; luego caerá fuera.

PROPOSICION XIII. TEOREMA.

En el triángulo esférico acutángulo ABC *cada lado es menor que el quadrante* (fig. 12.)

DEMOSTRACION.

Porque los ángulos B y C sobre la base son agudos, el perpendiculo AD (p. 12.) cae dentro del triángulo: luego en el triángulo rectangulo ADC, por ser los ángulos CAD, DCA de la misma especie agudos, será (p. 11. la hypotenusa AC menor que el quadrante; luego, el lado AC es menor que el quadrante.

Lo mismo se demuestra del lado AB. Y tirando el perpendiculo del ángulo C sobre AB, se demostrará tambien que CB es menor que el quadrante: luego cada lado es menor que el quadrante.

No al contrario, porque tres lados menores que el quadrante pueden tener un ángulo obtuso.

COROLARIO. (*FIG.* 2.)

Si en el triangulo BAC, dos ángulos BAC, BCA son obtusos, y el tercer ángulo B es agudo, los lados BA, BC opuestos á los ángulos obtusos, serán mayores que el quadrante, y el tercer lado opuesto al ángulo agudo, será menor que el quadrante, porque todos los ángulos del triangulo opuesto ADC (def. 3.) serán agudos: luego cada uno de sus lados será menor que el quadrante; luego (def. 1.) AB, BC son mayores que quadrantes, y AC menor.

PROPOSICION XIV. TEOREMA.

Si un triángulo esférico ABC *tiene un lado* AC *no menor que quadrante, y por conterminos dos ángulos* BAC, BCA *obtusos, el tercer ángulo* B *será tambien obtuso* (fig. 2.)

DEMOSTRACION.

Si el ángulo B no es obtuso, será recto ó agudo. No es recto, porque siendo los ángulos BAC, BCA de una especie obtusos; la hypotenusa ó lado AC (p. 11.) será menor que el quadrante, que es contra lo supuesto. No es agudo, porque los tres ángulos de un triángulo opuesto ADC (def. 3.) serían agudos y entonces AC sería (p. 13.) menor que el quadrante, que es asimismo contra lo supuesto: luego el ángulo en B es obtuso.

COROLARIOS.

1 Si los ángulos DAC DCA son agudos, y el lado AC del triángulo ADC no es menor que el quadrante, el tercer ángulo D será obtuso, porque en el triángulo opuesto ABC los ángulos BAC, BCA (def 3.) son obtusos, y AC es (por sup.) no menor que quadrante: luego (por esta p.) el ángulo B es obtuso: luego su igual D (def. 3.) será obtuso.

2 Si el lado AD es menor que el quadrante, y los ángulos D obtuso, y DAC agudo, el ángulo DCA es agudo; porque en el triángulo opuesto CAB los ángulos B y CAB (def. 3.) son obtusos, y el lado AB mayor que quadrante: luego (por esta p.) el ángulo ACB será obtuso, y DCA agudo.

PROPOSICION XV TEOREMA.

En el triángulo obliquángulo que tiene cada uno de sus lados mayor que el quadrante; ó el uno quadrante, y cada uno de los otros mayor que el quadrante, sus tres ángulos serán obtusos (fig. 7.)

Sea el triángulo ABC cuyos tres lados sean mayores que quadrantes, y el menor de ellos BC digo que cada uno de sus ángulos es obtuso.

Cortese BD igual al menor lado BC y tirese el arco DC.

DE

DEMOSTRACION.

En el triángulo isóceles DBC, los lados BC BD son mayores que quadrantes: luego (p.8.) los ángulos BDC, BCD serán obtusos, y mas lo será BCA. Del mismo modo se demuestra que el ángulo B es obtuso. Mas porque en el triángulo ABC el lado BC es mayor que el quadrante y los ángulos en B y C son obtusos, el tercer ángulo A (p. 14.) será tambien obtuso que es lo primero.

Lo segundo, sea cada uno de los lados AB, AC mayor que quadrante, y la base BC sea quadrante.

Cortese BD, igual á BC y tirese el arco DC.

DEMOSTRACION.

En el triángulo BDC los lados BD, BC son quadrantes, luego (p. 8.) los ángulos BCD, BDC serán rectos, luego el ángulo BCA es obtuso.

Del mismo modo se demostrará que el ángulo B es obtuso, y el tercer ángulo A (p. 14.) es asimismo obtuso.

No al contrario, porque el triángulo ADC (fig. 2.) cuyos tres lados son menores que quadrantes, puede tener el ángulo D obtuso, y el triángulo opuesto ABC tendrá (def. 3.) sus tres ángulos obtusos, y el lado AC menor que quadrante.

CO-

COROLARIOS.

1 Si en un triángulo DAC, dos lados DA DC son menores que quadrantes, y el tercer lado AC no es menor que el quadrante, el ángulo D, opuesto al mayor lado, es obtuso, y los dos restantes agudos; porque en el triángulo opuesto ABC, los lados AB, CB (def. 1.) son mayores que quadrantes, y el lado AC (por sup.) no es menor que el quadrante, todos sus ángulos son obtusos: luego (def. 3.) el ángulo en D es obtuso, y los ángulos DAC, DCA agudos.

2 Si en el triángulo obliquángulo algun ángulo fuere agudo, algun lado será menor que el quadrante: porque si todos fuesen mayores que quadrantes, ó dos mayores que quadrantes y uno quadrante, todos los ángulos serían obtusos.

CAPITULO II.

DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES para las resoluciones de los triangulos esféricos rectangulos.

EN los triángulos rectangulos esféricos el lado opuesto al ángulo recto se llama, como en los rectilineos, hypotenusa, y los otros se quedan con el nombre general de lados.

PROPOSICION XVI. TEOREMA.

En el triángulo esférico rectangulo ABC , *cuyos tres lados son menores que quadrantes , el seno de la hypotenusa* AB *es al seno del ángulo recto* C *ó radio : como el seno del lado* BC *al seno del ángulo agudo opuesto* BAC (fig. 8.)

Sea D el centro de la esféra , y las rectas DA, DB , DC comunes secciones de los circulos AB, BC, AC , del punto B tirense las rectas BE , BF perpendiculares á los radios DC , DA y será BE seno del arco BC y BF seno del arco BA , tirese la recta FE.

DEMOSTRACION.

Porque el ángulo C es recto, será el plano BDC (def. 3.) recto al plano ADC y la recta BE que es perpendicular al radio DC lo será (def. 4. l. 11. Eucl.) al plano ADC : luego (defin. 3. l. 11 Eucl.) el ángulo BEF es recto, y por tanto igual al ángulo esférico C. Asimismo porque à los planos inclinados ADC, ADB los corta el plano BFE recto (p. 18. l. 11. Eucl.) à el uno ADC y de las secciones BF, FE, la una BF es (por const.) perpendicular á la comun seccion AD, lo será tambien (Sch. p. 19. l. 11. Euc.) la otra FE : luego (def. 5. l. 11. Euc.) el ángulo BFE es el de la inclinacion de los planos ADB , ADC el qual (def. 3.) es igual al ángulo esférico A.

Fi-

Finalmente en el triángulo plano BFE, la hypotenusa BF al seno del ángulo recto BEF es (p. 3. de la Trig.) como el lado BE al seno del ángulo opuesto BFE; pero los ángulos BEF, BFE son iguales à los ángulos esféricos C y A: y BF, BE son senos de los lados BA BC: luego el seno de la hypotenusa BA al seno del ángulo C ó radio es como el seno del lado BC al seno del ángulo opuesto BAC.

ESCOLIO.

En el triángulo CBG (fig. 6.) rectangulo en B que tiene el ángulo BCG obtuso, tambien son proporcionales los senos de los ángulos con los lados opuestos; porque en el triángulo rectangulo ABC el seno del ángulo recto ABC al seno de la hypotenusa AC es como el seno del ángulo agudo ACB al seno del lado opuesto AB como se ha demostrado; pero los ángulos ACB, BCG y los lados AC, CG y AB, BG cada dos tienen un mismo seno (def. 3. de la Trigon.) porque son unos de otros complementos al semicirculo: luego el radio al seno de la hypotenusa CG, es como el seno del ángulo BCG, al seno del lado opuesto BG.

PRO-

PROPOSICION XVII. TEOREMA.

En el triángulo esférico rectangulo ABC *el seno del lado* AC *con termino al ángulo* A *es á la tangente del lado* CB *opuesto á dicho ángulo, como el seno del ángulo recto* C *ó radio á la tangente del ángulo* A. (fig. 9.)

Del punto C, tirese la recta CF perpendicular al radio DA que será seno del lado AC, y sobre DC levantese la perpendicular CE en el plano del circulo BDC que será tangente del arco CB por encontrar á DB prolongada en E: tirese la recta EF (fig. 9.)

DEMOSTRACION.

Los ángulos FCE, CFE del triángulo plano EFC se demuestran como en la antecedente ser iguales á los ángulos esféricos BCA, BAC.

Mas, porque en el triángulo plano ECF el lado CF es (p. 2. S. 2. de la Trig. p.) al lado CE como el radio á la tangente del ángulo CFE y CF es seno del lado CA, CE tangente del lado CB, y los ángulos planos ECF, EFC iguales á los esféricos C y A, se sigue que CF seno del lado CA es á CE tangente del otro BC como el seno del ángulo recto ó radio à la tangente del ángulo A y alternando, é invirtiendo &c.

CAPITULO III.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGU-
los esféricos rectangulos.

En los dos teoremas del capitulo antecedente se funda toda la resolucion de los triángulos esféricos rectangulos; pero antes de pasar á ella se deben notar las observaciones siguientes.

OBSERVACIONES.

1 Siempre que en la analogía entre la hypotenusa, ó conocida, ó que se busca, se funda la resolucion en la proposicion 16 por ser la proporcion de senos de lados á ángulos opuestos, y al contrario: pero quando la hypotenusa no entra en la analogía, se fundará en la proposicion 17, por ser entonces la proporcion de senos á tangentes, y al contrario.

2 Quando en un triángulo esférico CGF rectangulo en G (fig. 10.) que se pretende resolver, no tuviese cabida con los tres terminos, conocidos una de las dos analogías dichas; se prolongarán los lados GF, y CF que comprehenden uno de los ángulos obliquos hasta los puntos E y L, de modo, que tanto EG, como CL sean quadrantes, y juntando los extremos E y L con el arco de circulo maxîmo EL, resultará un triángulo ELF rectangulo en L cuyos lados, y ángulos serán iguales á los

del

del triángulo dado CGF, ó á sus complementos. Efectivamente, si se prolongan los lados CG, y EL hasta que concurran en H; se tendrá que por ser GE un quadrante, y el ángulo CGF ó su vecino EGH rectos, será (Cor. 2. p. 8.) el punto E polo del arco CG, el arco EH un quadrante, y el ángulo en H recto, y (escol. p. 11.) será el arco CH otro quadrante: luego (defi. 3.) el punto C es polo de LE y el ángulo CLH ó su vecino FLE es (p. 8.) recto.

Supuesto esto, es evidente que el ángulo L, es igual al ángulo G por rectos, el ángulo EFL igual al ángulo CFG por verticales opuestos. El lado LE que es complemento de LH lo es tambien del ángulo FCG de quien el arco LH (defi. 3.) es medida; FL es complemento de CF, y el ángulo E cuya medida es GH es complemento de CG por serlo tambien el arco GH: luego se verifica que las partes del triángulo CGF, son iguales á las del triángulo EFL ó á sus complementos.

Del mismo modo en el triángulo CBA prolongando los lados FC y GC que comprehenden el ángulo GCF hasta cumplir los quadrantes GA, y FE, tirando el arco de circulo maxîmo AB que prolongado concurra en K con la prolongacion del lado FG, se tendrá como en el triángulo anterior que las partes del triangulo CGF son iguales á las del triangulo ABC, ó á sus complementos, lo qual se demuestra como la antecedente.

De lo dicho concluiremos, que habiendose de resolver un triángulo FGC, en quien no tenga cabida la analogía de la proposicion 16 ni la de la 17 se recurrirá á uno de los dos triángulos ELF ó ACB y en los quales aplicando la analogía que les corresponda (observacion 1.) se conocerán las partes de estos triángulos, y por medio de estas, las del triángulo propuesto. Estos dos triángulos que llamaremos en lo succesivo complementarios, * son de un uso muy freqüente en las resoluciones de los triángulos esféricos rectangulos.

3 Las proposiciones 10 y 11 sirven para determinar la especie de los lados, y ángulos de los triángulos rectangulos exceptuando dos casos: el primero es quando dos ángulos son rectos, ó dos lados quadrantes: porque en este caso nada puede determinarse del tercer ángulo ó lado, mas que este es medida del ángulo.

El segundo es quando se conoce solamente un lado de los que comprehenden el ángulo recto, y su ángulo opuesto, como (fig. 6.) en el triángulo ABC rectangulo en B si se conoce un lado BC, y su ángulo opuesto A, y no se sabe otra cosa, esto es, ni la especie de la hypotenusa AC, ni del otro lado AB ó ángulo opuesto; dicho triángulo está indeterminado: porque en el triángulo opuesto BCG, el ángulo en G es igual al ángulo A, el lado BC, comun á entrambos, y el ángulo en B tambien recto: luego si se busca la hypotenusa, no sabemos si es AC, ó su suplemento al semicirculo CG.

PRO-

* *Hemos substituido los complementarios dichos, á los del Autor, por parecernos estos mas generales, y mas claros; aunque en la realidad sean los mismos.*

PROPOSICION XVIII. PROBLEMA.

Dado un lado GF *del triangulo rectangulo* FGC, *y su ángulo opuesto* C *hallar primero la hypotenusa* CF (fig. 10.)

LA hypotenusa se supone ha de ser menor que el quadrante. (p. 16.) Como el seno del ángulo C, es al seno del lado opuesto CF asi el radio ó seno del ángulo recto G al seno de la hypotenusa CF.

2 Para hallar el lado GC será su analogía (p. 17) como la tangente del ángulo C á la tangente del lado GE asi el radio al seno del lado GC.

3 Hallar el ángulo GFC: se buscará la analogía en el complemental FLE, en quien se conoce el lado FE complemento al quadrante del lado conocido GF, el lado LE complemento de HL que es conocido por ser medida del ángulo conocido GCF, y el ángulo L recto: luego (p. 16) el seno de FE que es coseno de FG, es al radio, como el seno LE que es segundo del ángulo GCF es al seno de LFE, ó de su vertical opuesto GFC.

PROPOSICION XIX. PROBLEMA.

Dado el ángulo GCF, *y el lado con termino* CG *hallar primero el lado* GF (fig. 10.)

LA analogía es (p. 17) como el radio, al seno del lado GC; asi la tangente del ángulo GCF á la tangente del lado GF.

2 hallar la hypotenusa, se buscará la proporcion en el triangulo FLE (p. 17) en quien se conoce LE complemento de LH medida del angulo GCF conocido, y el ángulo E porque lo mide al arco GH complemento de CG conocido: luego el radio es al seno de LE que es segundo de LH ó del ángulo GCF como la tangente del ángulo E que es segunda de GC, á la tangente de FL que es segunda de la hypotenusa CF.

3 Hallar el angulo GFC, se buscará la analogía en el triangulo ABC (p. 16.) en quien se conoce el ángulo BCA por vertical al ángulo GCF; el lado CA complemento de CG y el ángulo recto B: luego la proporcion será, el radio al seno de la hypotenusa AC que es segundo de CG, como el seno del ángulo BCA, ó de su vertical GCF, al seno del lado AB que es segundo de BK medida del ángulo GFC.

PROPOSICION XX. PROBLEMA.

Dada la hypotenusa CF, *y el ángulo* GCF *hallar lo primero el lado* GF (fig. 10.)

Proporcion (p. 16) el radio es al seno de la hypotenusa CF, como el seno del ángulo GCF, al seno del lado GF.

2 Hallar el lado CG, se buscará la analogía en el triangulo FLE (p. 17): como el seno del lado LE que es segundo del ángulo GCF es al radio, asi la tangente de FL que es segunda de CF á la tangente del ángulo en E que es segunda de CG.

3 Hallar el ángulo GFC se dirá (p. 17) en el triangulo ABC como el radio, es al seno del lado BC que es segundo de la hypotenusa CF asi la tangente del ángulo BCA ó de su vertical GCF, es á la tangente de AB que es segunda de BK medida del ángulo GFC.

PROPOSICION XXI. PROBLEMA.

Dados los lados CG *y* GF *hallar primero el ángulo* GCF (fig. 10.)

Proporcion: (p. 17.) el seno del lado CG, al radio, como la tangente del lado GF á la tangente del ángulo GCF.

2 Hallar el ángulo GFC, se dirá: (p. 17.) como el seno del Lado CF al radio, asi la tangen-

gente del lado CG, á la tangente del ángulo GFC.

3 Hallar la hypotenusa AB, se buscará la proporcion en el triangulo FLE (p. 16.) como el radio es al seno de la hypotenusa EF que es segundo de GF, asi el seno del ángulo E que es segundo de GC, al seno del lado FL que es segundo de la hypotenusa CF.

PROPOSICION XXII. PROBLEMA.

Dada la hypotenusa CF, *y el lado* CG, *hallar lo primero el ángulo* GFC (fig. 10.)

Proporcion: (p. 16.) como el seno de la hypotenusa CF, al radio asi el seno del lado CG, al seno del ángulo GFC.

2 Hallar el ángulo GCF se dirá en el triangulo FLE (p. 17.) como la tangente del ángulo E que es segunda del lado CG, á la tangente del lado FL que es segunda de CF, asi el radio, al seno del lado EL que es segundo del ángulo GCF.

3 Hallar el lado GF, se tendrá la analogía en el triangulo FLE (p. 16.) el seno del angulo E que es segundo de CG, es al seno de FL que es segundo de CF, como el radio al seno de la hypotenusa EF, que es segundo de FG.

PRO-

PROPOSICION XXIII. PROBLEMA.

Dados los ángulos GCF, *y* GFC *hallar lo primero la hypotenusa* CF (fig. 10.)

La proporcion se hallará en el triangulo FLE (p. 17) como la tangente del ángulo LFE es á la tangente del lado LE que es segunda del ángulo GCF, asi el radio, al seno de FL, que es segundo de la hypotenusa CF.

2 Hallar el lado GF se buscará la proporcion en el triangulo FLE (p. 16.) y se dirá, como el seno del ángulo LFE, es al seno del lado LE que es segundo del ángulo GCF, asi el radio, al seno de la hypotenusa FE que es segundo de FG.

3 Hallar el lado CG se buscará la analogía en el triangulo ABC: (p. 16.) como el seno del ángulo BCA, ó GCF, al seno del lado BA: que es segundo del ángulo GFC, asi el radio al seno de CA que es segundo de CG.

ESCOLIO.

Quando los datos de un triangulo rectangulo que se quiere resolver son mayores que quadrantes, como en el triangulo CBG (fig. 6.) rectangulo B, en quien los lados CG, y BG son mayores que quadrantes; y el ángulo BCG es obtuso, se tendrá la analogía en el triangulo CBA, porque en él, los lados AC, y AB son menores que quadrantes por supleplementos de los dos mayores CG, BG; el lado comun á uno, y otro triangulo, y el ángulo A igual al ángulo G, luego por uno de los Problemas antecedentes, se resolverá el triangulo ABC, y se tendrá conocido el triángulo CBG: de donde resulta que aunque sean dos de los lados de un triangulo rectangulo, mayores que quadrantes, podrá suponerse por un instante (para hacer las prolongaciones de los triangulos complementarios) que los tres lados del triangulo dado son menores que quadrantes, por ser como se ha visto, unos de otros suplementos al semicirculo, ó porque los arcos mayores de 90 grados, y ángulos obtusos, no tienen otros senos, tangentes ni secantes que los de sus suplementos al semicirculo, como se dixo en la trigonometría plana.

PROPOSICION XXIV. PROBLEMA.

Resolucion de los triangulos quadrantales (fig. 11.)

Triangulo quadrantal es el que tiene un quadrante ó arco de 90 grados por uno de sus lados, y aunque no es rectangulo, se resuelve por un triangulo rectangulo del modo siguiente.

Sea lo primero el triangulo ACB en quien se dan los lados AC CB menores que quadrantes, y el lado AB quadrante, y será el ángulo ACB obtuso (cor. 1. p. 15.) y los ángulos CAB CBA agudos: alargarse el lado AC hasta cumplir el quadrante AD, y tirese el arco BD, el qual es medida (def. 3.) del ángulo A. En

En el triangulo CDB (p. 8) rectangulo en D se conoce CD por ser complemento al quadrante de AC y la hypotenusa CB: luego (por la p. 22.) se hallará el ángulo CBD, el qual restado del ángulo recto ABD quedará conocido el ángulo ABC.

Si se pide el ángulo A se buscará en el rectangulo CDB el lado BD y su valor es el ángulo A.

Para hallar el ángulo ACB se buscará en el triangulo el ángulo DCB, y su complemento á dos rectos será el valor del ángulo ACB: y respectivamente se hará lo mismo con los otros datos.

Lo segundo, si en el quadrantal ABE se dá el lado AE mayor que el quadrante, y BE menor, se tomará AD igual al quadrante AB y se tirará el arco BD y quedará formado el triangulo BDE.

Si se pretende el ángulo ABE quitando del arco AE el quadrante AD quedará DE conocido, y con la hypotenusa BE se hallará en dicho triangulo el ángulo DBE, el qual añadido al recto ABD componen el ángulo obtuso ABE. Tambien BD es medida del ángulo A, y hallado este lado se conoce dicho ángulo, y el ángulo E es comun á entrambos triangulos.

Lo tercero, si cada uno de los lados AB, CB del triangulo ACB (fig. 2.) es mayor que el quadrante AC sus tres ángulos (p. 15.) serán obtusos, y en el triangulo opuesto ADC los lados AD, DC son menores que quadrantes, por complemento á los semicirculos de los lados AB CB, y los angulos DAC DCA agudos complementos á dos rectos de los obtusos BAC BCA el ángulo D es obtuso igual (def. 3.) á B y el lado AC comun á entrambos es quadrante: luego resolviendo este como se ha dicho en el primer caso, quedará resuelto el triangulo ACB: y de lo dicho se infiere el modo de resolver el triangulo quadrantal con qualesquiera otro dato.

CAPITULO IV.

DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES para las resoluciones de los triangulos esféricos obliquangulos.

PROPOSICION XXV. TEOREMA.

En qualquier triangulo esférico ABC *los senos de los lados* AB AC *son proporcionales con los senos de los ángulos opuestos* C y B. (fig. 12. y 13.)

¶ Caiga desde A la perpendicular AD.

DEMOSTRACION.

En el triangulo rectangulo BDA son proporcionales (p. 16.) el radio al seno del lado AB como el seno del ángulo B al seno del perpendiculo AD.

Asimismo en el triangulo rectangulo ADC son proporcionales el radio al seno del lado AC, como el seno del ángulo C al seno del perpendiculo AD, y como (p. 16. l. 6. Euc.) el rectangulo de los extremos es igual al de los medios, y los extremos son

unos

unos mismos en las dos proporciones, serán los dos rectangulos de los medios iguales entre sí: luego el rectangulo de los senos del lado AB y ángulo B, es igual al rectangulo de los senos del lado AC y angulo C: luego sus lados son reciprocamente proporcionales (p. 14. l. 6. Euc.) como el seno del lado AB al seno del lado AC asi el seno del ángulo C al seno del ángulo B, y al contrario.

Lo mismo se demuestra aunque el perpendiculo AD caiga fuera; porque en este caso los angulos ACB ACD tienen un mismo seno.

PROPOSICION XXVI. TEOREMA.

En qualquier triangulo esférico ABC *los senos de los segmentos* BD DC *que hace el perpendiculo* AD *en la base* BC *son reciprocamente proporcionales con las tangentes de los ángulos sobre la base* B y C (fig. 13.)

Los segmentos siempre se han de tomar desde cada ángulo sobre la base hasta el perpendiculo, aunque este caiga fuera del triangulo.

DEMOSTRACION.

En el triangulo rectangulo BDA son proporcionales (p. 17) el radio al seno del segmento BD como la tangente del ángulo B á la tangente del lado AD.

Asimismo en el triangulo rectangulo ADC, es

co-

como el radio al seno del segmento DC, asi la tangente del ángulo C á la tangente del lado AD, y como en las dos proporciones los extremos son unos mismos, los medios como se demostró en la antecedente, serán reciprocamente proporcionales como el seno del segmento BD al seno del segmento DC, asi la tangente del ángulo C á la tangente del ángulo B, y al contrario.

PROPOSICION XXVII. TEOREMA.

En qualquier triangulo esférico ABC *los senos de los ángulos verticales* BAD DAC *son proporcionales con los senos segundos de los ángulos sobre la base* B y C (fig. 13.)

DEMOSTRACION.

En el triangulo rectangulo ADB son proporcionales (p. 19. n. 3.) el radio al seno segundo del lado AD como el seno del ángulo BAD al seno segundo del ángulo B: y asimismo en el triangulo ADC el radio es al seno segundo del lado AD como el seno del ángulo DAC, al seno segundo del ángulo C: luego (p. 11. l. 5. Euc.) el seno del ángulo BAD al seno segundo del ángulo B es como el seno del ángulo DAC al seno segundo del ángulo C, y al contrario.

PRO-

PROPOSICION XXVIII. TEOREMA.

En qualquier triangulo esférico BAC *los senos segundos de los ángulos verticales* BAD DAC *son proporcionales con las tangentes segundas de los lados* AB AC (fig. 13.)

DEMOSTRACION.

En el triangulo rectangulo BDA es el radio al seno segundo del ángulo BAD como la tangente segunda del lado AD á la tangente segunda del lado AB. Y asimismo el radio al seno segundo del ángulo DAC es como la tangente segunda del lado AD, á la tangente segunda del lado AC: luego como el seno segundo del ángulo BAD al seno segundo del ángulo DAC asi la tangente segunda del lado AB á la tangente segunda del lado AC.

PROPOSICION XXIX. TEOREMA.

En qualquier triangulo esférico BAC *los senos segundos de los lados* AB AC *son proporcionales con los senos segundos de los segmentos de la base* BD DC (fig. 13.)

DEMOSTRACION.

En el triangulo rectangulo BDA es el seno segundo de AD al radio, como el seno segundo de AB al al seno segundo de BD. Asimismo en el triangulo rectangulo ADC el seno segundo de AD al radio es como el seno segundo de AC al seno segundo de DC: luego (p. 11. l. 5. Euc.) el seno segundo de AB al seno segundo de BD es como el seno segundo de AC al seno segundo de DC, y al contrario.

LEMAS PARA LA PROPOSICION SIGUIENTE.

LEMA 1. (fig. 14)

Si la recta EG *tirada del centro corta por medio el arco* BGC *cortará por medio á su cuerda* BC *y será perpendicular á ella.*

DEMOSTRACION.

Porque los arcos BG GC son (por suposicion) iguales los ángulos en E, lo serán tambien (p. 29. l. 3. Euc.) y porque son iguales los lados EB EC y el lado EO comun, las bases BO OC (p. 4 l. 1. Euc.) serán iguales, y asimismo los ángulos en O, y por tanto rectos: luego &c.

LEMA 2. (fig. 15.)

Si por el vertice A *del triangulo isóceles esférico* CAD *pasa la recta* AM *paralela á la cuerda* CD, *dicha recta* MA *tocará á la esfera en que está el triangulo* ACD.

Por los puntos ACD describase el circulo CDA, y tirense las cuerdas AC AD.

DEMOSTRACION.

Porque la recta MA es paralela á CD, el ángulo MAD será igual á su alterno CDA (p. 29. l. 1. Euc.) (p. 5 l. 1. Euc.) á su igual C: luego porque el ángulo MAD es igual al de su segmento alterno C, la recta MA será tangente al circulo ACD como se refiere de la (p. 32. l. 3. Euc.) y por consiguiente á la esfera.

LEMA 3. (fig. 16.)

En los triangulos isóceles ABC AEF *el plano del circulo máximo* AGD *que divide por medio el ángulo vertical* A *cortará igualmente, y en ángulos rectos las bases* BGC EDF *y sus cuerdas* BC EF *que tambien son paralelas.*

DEMOSTRACION.

En los triangulos esféricos BAG CAG los ángulos en A son (por sup.) iguales, como tambien los la-

lados AB AC y el lado AG comun: luego (p. 1.) las bases BG GC son iguales, como tambien los ángulos en G y por consiguiente rectos, y el plano del circulo BGC es recto al plano del circulo AGD.

Semejantemente se demuestra que las bases ED, DF son iguales, y los ángulos en D rectos.

A mas de esto la recta CO (lem. 1.) á la linea tirada de G al centro: pero esta linea es (def. 1) comun seccion de los circulos AGD BGC: luego CO es perpendicular á la seccion comun de los planos AGD CGB y por tanto (def. 4. l. 11 Euc.) es recta al plano del circulo AGD.

Del mismo modo se demuestra que FL es recta ó perpendicular al plano AGD: luego (p. 6. l. 11. Euc.) las lineas CO, FL ó las cuerdas BOC ELF son paralelas.

PROPOSICION XXX. TEOREMA.

En qualquier triangulo esférico ABC *son proporcionales el rectangulo de los senos de los lados* BA BC *que incluyen el ángulo vertical* B *al quadrado del radio, como el rectangulo de los senos de las diferencias de dichos lados, y la semisuma de los tres al quadrado del seno de la mitad de dicho ángulo vertical* (fig. 17.)

Prolonguese el menor lado BA, y cortese BQ igual á BC y BH igual á AB y AD QE iguales á la base AC, dividanse por medio los arcos AQ DQ en los puntos R y L, y porque AQ es diferencia

cia de los lados AB BC será RA la semidiferencia y BR (c. p. 4. Trig. p.) semisuma de los lados AB BC, y porque AQ y QD juntas son iguales á la base AC sus mitades RQ QL, esto es, LR será la semibase, que junta con BR semisuma de los otros dos lados quedará BL igual á la semisuma de los tres: luego LA será diferencia entre el lado menor BA y la semisuma de los tres BL y LQ diferencia entre el lado mayor BC ó su igual BQ y dicha semisuma.

Dense los arcos del circulo maxîmo AIH QFC, y sus cuerdas AH QC, y dividase el ángulo vertical B por medio con el plano del circulo maxîmo BOF que (lem. 3.) cortará dichos arcos, y sus cuerdas por mitad, y en ángulos rectos, y será HO seno del arco HI y CP seno del arco CF (def. 3.)

Dense asimismo AE QD y por el punto L y centro del maxîmo BAE la recta LNG que (lem. 1.) cortará dichas cuerdas por mitad y en ángulos rectos en los puntos N y G y será AG seno del arco AL y QN seno del arco QL.

A mas de lo dicho, dense las rectas EH DC y porque las rectas AH QC y tambien AE QD son paralelas (lem. 3.) los planos de los triangulos HAE CQD que pasan por estas lineas son paralelos (p. 15. l. 11. Euc.)

Finalmente describase un circulo al rededor del triangulo HAE y por el vertice A del triangulo isóceles ADC dese la recta MA paralela á la cuerda DC que (lem. 2.) será tangente á la esfera en el punto A, y porque es paralela á la cuerda DC y toca al plano del triangulo HAE estará en el mismo plano con el (cor. p. 16. l. 11. Euc.) luego la MA que toca á la esfera en A tocará tambien á el circulo HAE en el mismo punto: esto supuesto.

DEMOSTRACION.

En los triangulos HAE CQD porque son paralelas AH QC (lem. 3.) tambien AE QD los ángulos HAE CQD son iguales (p. 10. l. 11. Euc.) y por la misma lo son MAE QDC pero el ángulo MAE es igual al ángulo AHE formado en el segmento alterno (p. 32. l. 3. Euc.) luego (ax. 1.) serán iguales AHE QDC y (p. 32. l. 1. Euc.) sus lados proporcionales como AH AE asi DQ á QC y (p. 15. l. 5. Euc.) HO mitad de HA á AG mitad de AE asi QN mitad de QD á CP mitad de CQ: luego (p. 16. l. 6. Euc.) el rectangulo de los extremos OH PC es igual al de los medios AG QN. Asimismo en los triangulos esféricos BIH BFC rectangulos en I y F son proporcionales (p. 16.) como el seno de la hypotenusa BH al radio, asi el seno del lado HI al seno del ángulo opuesto IBH y como el seno de la hypotenusa BC al radio, asi el seno del lado FC al seno del ángulo CBF: luego (p. 22. l. 6. Euc.) el rectangulo de los senos de los lados BH ó BA su igual, y BC al quadrado del radio es como el rectangulo de los senos OH PC al quadrado del seno del ángulo CBP mitad de ABC,

pe-

pero el rectangulo de OH PC se ha probado igual al de AG QN : luego si en lugar de aquel se toma éste quedarán proporcionales el rectangulo de los senos de los lados BA BC al quadrado del radio, como el rectangulo de los senos AG QN de las diferencias de los lados BA BC, y de la semisuma de los tres lados al quadrado del seno de la mitad del ángulo vertical ABC.

CAPITULO V.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS esféricos obliquangulos.

Los mas de los problemas siguientes han menester para sus resoluciones el perpendiculo con que se divide el triangulo obliquangulo en dos triangulos rectangulos; y en uno de ellos se busca el segmento de la base, ó ángulo vertical que forma el perpendiculo, y en el triangulo obliquangulo se concluye la resolucion, hallando el lado ó ángulo que se busca.

REGLAS PARA EL PERPENDICULO.
(Fig. 13.)

En qualquier triangulo ABC el perpendiculo AD siempre ha de caer del extremo de un lado conocido BA sobre el otro BC que incluye el ángulo B conocido, para que asi haya en el triangulo ADB á mas del ángulo recto dos cosas conocidas, que son el lado AB, y el ángulo obliquo B.

No-

Notesé, que en dos problemas de los siguientes se hallará poderse echar el perpendiculo con las condiciones dichas de dos maneras, y de qualquiera que se use se obrará bien, conociendo la especie de los ángulos adyacentes al lado sobre que cae: en los otros cae solamente de una parte, de que se dirá en sus lugares.

Si los ángulos B y C son de una especie (p. 12) el perpendiculo cae dentro del triangulo, y es de la especie de dichos ángulos; y si son de diferente especie cae fuera, y es de la especie del ángulo externo: advirtiendo, que el perpendiculo quando cae fuera, puede ser á una y otra parte, mas nosotros lo echamos siempre opuesto al ángulo conocido.

PROPOSICION XXXI. PROBLEMA.

Dados los lados AB, BC, *y el ángulo intermedio* B *del triangulo obliquangulo* ABC *hallar qualquier ángulo* (fig. 13.)

Para hallar el ángulo C el perpendiculo debe caer precisamente del ángulo no conocido A que no se busca.

En el triangulo rectangulo BDA con la hypotenusa AB y el ángulo B se hallará el segmento BD con la analogía siguiente; (p. 20. n. 2.) como el seno segundo del ángulo B al radio, asi la tangente segunda de AB á la tangente segunda del segmento BD. Con este segmento se conocerá el otro

seg-

segmento CD, restando en el primer triangulo BD de la base BC, y en el segundo restando la base BC del segmento BD: para hallar el ángulo C se hará la proporcion siguiente: (p. 13) como el seno DC al seno del segmento BD, asi la tangente del ángulo B á la tangente del ángulo C que se busca.

Quando por la prop. y cor. del cap. 1. no se conoce la especie del ángulo C la mostrará la operacion; porque si el segmento hallado BD es menor que la base BC, el perpendiculo AD cae dentro del triangulo, y el ángulo C es de la especie del conocido B: mas si dicho segmento es igual á la base BC, el ángulo C será recto, y el lado AC coincidirá con el perpendiculo.

Pero si el segmento BD es mayor que la base BC el perpendiculo AD cae fuera, y el ángulo C será de contraria especie del conocido B, para lo qual se tendrán muy presentes las proposiciones 10 y 11, porque por ellas se conoce la especie del segmento BD, como asimismo la del ángulo vertical BAD.

Si se busca el ángulo A, debe caer el perpendiculo del ángulo C, y con los segmentos de AB, se hallará con las analogías antecedentes.

PRO-

PROPOSICION XXXII. PROBLEMA.

Dados los lados AB, BC, *y el ángulo intermedio* B, *hallar el lado* AC (fig. 12.)

El perpendiculo ha de caer del ángulo no conocido A, sobre el lado conocido BC, ó del ángulo no conocido C, sobre el lado conocido AB.

Busquese por la analogía primera de la antecedente los segmentos BD, DC, y por la prop. 29 se formará la proporcion siguiente para hallar el lado AC. Como el seno segundo del segmento BD al seno segundo del segmento DC, asi el seno segundo del lado AB, al seno segundo del lado AC.

PROPOSICION XXXIII. PROBLEMA.

Dados los ángulos A *y* B, *y el lado intermedio* AB *hallar el otro ángulo* C (fig. 13.)

El perpendiculo cae del ángulo conocido A sobre el lado no conocido BC, ó del ángulo conocido B, sobre el lado no conocido AC.

En el triangulo rectangulo BAD, se busca el ángulo DAB, con la hypotenusa AB, y el ángulo B; la analogía es de la proposicion 20 n. 3. Como el radio al seno segundo del lado AB, asi la tangente del ángulo B á la tangente segunda del ángulo DAB.

El ángulo hallado se resta del ángulo BAC, y

el

el residuo es el ángulo DAC en el triangulo primero; pero en el segundo el ángulo dado BAC se resta del hallado BAD, para tener el vertical CAD. Con los ángulos verticales BAD DAC, y el ángulo B dado se hallará el ángulo C con la analogía siguiente: (p. 26.) como el seno del ángulo BAD, al seno del ángulo DAC, asi el seno segundo del ángulo B, al seno segundo del ángulo C.

Quando no se conoce la especie del ángulo C hecha la analogía primera, si el ángulo hallado BAD es menor que el dado BAC, el perpendiculo cae dentro: si es igual, el ángulo C es recto, y si mayor el perpendiculo cae fuera, y se conoce la especie de dicho ángulo.

PROPOSICION XXXIV. PROBLEMA.

Dados los ángulos A *y* B, *y el lado intermedio* AB *hallar qualquiera de los lados opuestos*, (fig. 13.)

Para hallar el lado AC ha de caer necesariamente el perpendiculo sobre el lado BC no conocido, que no se busca.

Hallense los ángulos verticales como en la antecedente, y por la (p. 28.) se hará la proporcion siguiente para hallar el lado AC. Como el seno segundo del ángulo BAD al seno segundo del ángulo CAD, asi la tangente segunda del lado AB á la tangente segunda del lado AC.

Si se busca el lado BC debe caer el perpendiculo

lo

lo del ángulo B sobre el lado AC, y si no se conoce la especie del ángulo C, se obrará como se dixo al fin de la antecedente.

PROPOSICION XXXV. PROBLEMA.

Dados los lados AB AC, *y un ángulo opuesto* B *hallar el otro ángulo opuesto* C. (fig. 13.)

Proporcion: (p. 25.) como el seno del lado AC al seno del ángulo opuesto B, asi el seno del lado AB al seno del ángulo opuesto C que se busca, pero es menester saber la especie del ángulo C, por semejante razon á la que se dió en el Sch. p. 13. l. 2.

PROPOSICION XXXVI. PROBLEMA.

Dados los lados AB AC, *y en ángulo opuesto* B *hallar el ángulo intermedio* A (fig. 13.)

El perpendiculo debe caer del ángulo que se busca A, y es menester saber la especie del ángulo C.

Busquese el ángulo BAD con la analogía 1. de la propos. 32. y (por la p. 28.) son proporcionales, como la tangente segunda del lado AB á la tangente segunda del lado AC, asi el seno segundo del ángulo BAD al seno segundo del ángulo CAD. Sumense en el triangulo 1. los ángulos BAD CAD hallados, y la suma es el ángulo BAC que se pide; mas en el triangulo segundo el residuo de dichos ángulos será el valor del ángulo BAC que se busca.

PROPOSICION XXXVII. PROBLEMA.

Dados los lados AB, AC *y en ángulo opuesto* B *hallar el tercer lado* BC (fig. 13.)

El perpendiculo cae precisamente sobre el lado BC que se busca, y es menester conocer la especie del ángulo C para saber si el perpendiculo cae dentro ó fuera del triangulo.

Busquese con la proporcion primera de la (p. 31.) el segmento BD, y para hallar el otro segmento se hará la analogía siguiente: (por la p. 29.) como el seno segundo del lado AB al seno segundo del lado AC, asi el seno segundo del segmento BD al seno segundo del segmento DC.

Sumense los segmentos hallados, y el agregado será el valor del lado BC en el triangulo primero; pero en el triangulo segundo se restará el menor segmento del mayor, y quedará el lado BC conocido.

PROPOSICION XXXVIII. PROBLEMA.

Dados dos ángulos B, *y* C *y un lado opuesto* AB *hallar el otro lado opuesto* AC (fig. 13.)

Proporcion: (p. 25.) como el seno del ángulo C al seno del lado opuesto AB asi el seno del ángulo B al seno del lado opuesto AC que se busca.

Pero es menester saber la especie del lado AC, porque en los triangulos ABD, ACD (fig. 13. triangulo segundo) siendo los lados AB, AC iguales al semicirculo tendrán los ángulos B y ACD (p. 7.) iguales, y el ángulo D comun, y tambien el lado AD opuesto á dichos ángulos iguales: y si se hace la analogía antecedente; como el seno del ángulo B ó de su igual ACD al seno del lado opuesto AD asi el seno del ángulo D al seno del lado opuesto, hay la ambiguedad si el lado que se busca es AB ó su complemento al semicirculo AC, por lo qual se necesita saber la especie del lado que se busca.

PROPOSICION XXXIX. PROBLEMA.

Dados los ángulos B *y* C *y un lado opuesto* AB *hallar el lado intermedio* BC (fig. 13.)

El perpendiculo ha de caer determinadamente sobre el lado BC que se busca, y es menester saber si este lado es menor ó mayor que quadrante.

Busquese como en la primera operacion de la p. 31. el segmento BD y (por la p. 26.) serán reciprocamente proporcionales como la tangente del ángulo C á la tangente del ángulo B si el seno del segmento BD al seno del segmento DC.

La suma de los segmentos BD, DC es el lado BC que se busca en el triangulo primero, pero en el segundo es el residuo de dichos segmentos.

PROPOSICION XL. PROBLEMA.

Dados los ángulos B y C *y el lado* AB *opuesto á uno de ellos, hallar el otro ángulo* A (fig. 13.)

El perpendiculo debe caer precisamente del ángulo A que se busca.

En el triangulo rectangulo BDA se conoce la especie del segmento BD (p. 11.) y la del ángulo vertical (p. 10.) opuestos BAD: mas para conocer la del segmento DC ó del vertical DAC es menester saber la especie del lado AC.

Hallese con la proporcion primera de la p. 33. el ángulo BAD: y para hallar el otro ángulo se hará (por la 27.) la analogía siguiente: como el seno segundo del ángulo B al seno segundo del ángulo C asi el seno del ángulo BAD al seno del ángulo DAC, con lo qual se conocerá el ángulo A.

PROPOSICION XLI. PROBLEMA.

Dados los tres lados hallar qualquier ángulo (fig. 17.)

En el triangulo ABC valga el lado AB 55 grados 30 minutos: el lado BC 40 grados 12 minutos, y el lado AC 54 grados, y 18 minutos: buscase el ángulo A.

Añadanse á los complementos aritmeticos de los senos de los lados, que comprehenden el ángulo que se se busca, los senos de los residuos hallados entre cada uno de dichos lados, y la semisuma de los tres, y la mitad de esta suma es seno Logaritmico de la mitad del ángulo comprehendido.

Lado menor incluyente AC..	54°.	18′	C.A. 00939.
Lado mayor incluyente AB..	55.	30	C.A. 00840.
Lado BC.	40..	12.	
Suma de los tres lados. .	150	00.	
Semisuma.	75	00.	
Residuo de la semisuma y lado AC.	20	42. . .	9.5483.
Residuo de la semisuma y lado AB..	19	30. . .	9.5234.

Suma de los quatro Logaritmos. . . . . . 19.2462.
Semisuma de dichos Logaritmos. . . . . . 9.6231.

Esta semisuma es seno de 24 grados, y 50 minutos, y su duplo 49 grados y 40 minutos es el valor del ángulo A que se pretendia.

La razon de esta practica es semejante á la que se puso al fin de la p. 5. de la Trig. p. y se funda en la (p. 30.) de esta Trigonometría,

LEMA PARA LA PROPOSICION SIGUIENTE (fig. 18.)

Dado un triangulo DEF *cuyos vertices* E, D, F *sean polos de los arcos* BC, BA, AC: *se formará otro triangulo* BAC *en los polos* A, B, C *de los lados* DF, FE, ED, *cuyos tres lados serán suplementos al semicirculo de los tres ángulos del triangulo* DEF, *y los tres ángulos del triangulo* ABC, *serán suplementos de los tres lados del triangulo* DEF.

Lo primero; por ser el punto E por suposicion, polo del arco BC, y el punto D polo del arco AC, el punto C distará igualmente del punto E, que del otro D: luego el punto C (def. 2.) es polo del arco ED; por igual razon lo son el punto B, polo del arco EF, y el punto A del arco DF. De donde resulta que por ser el punto C polo del arco GEDL, será CL (def. 2.) quadrante: por serlo B del arco NEFK, será BK otro quadrante: luego BK+LC=180°, esto es BLKC+LK=180° pero LK es (def. 3.) medida del ángulo DEF, y BLKC es suplemento del arco LK: luego tambien lo es del ángulo DEF de quien LK es medida, y por consiguiente el lado BC del triangulo ABC es suplemento del ángulo opuesto E. Lo mismo se diria de los otros dos lados AB y AC respecto á los ángulos F, y D.

Lo segundo, siendo por hypotesi el punto D polo del arco AGHC, será (def. 2.) DH un quadrandrante; por ser el punto F polo del arco ANMB, será FM otro quadrante: luego MF+DH=180° esto es, MDFH+DF=180° pero MDFH es medida del ángulo A, y este arco es suplemento del lado DF: luego el ángulo A, es asimismo suplemento del lado DF. Lo mismo que se ha dicho del ángulo A respecto de el lado DF, se diria de los otros dos B, y C respecto de los lados EF, y DE. Al triangulo ABC, llamaremos en adelante, suplemental. Se hará uso de este triangulo suplemental, quando en el triangulo obliquangulo que se pretendiere resolver, se diesen conocidos solamente sus tres ángulos.

ESCOLIO.

Por lo demostrado en el Lema antecedente se hace manifiesto que un triangulo esférico obliquangulo, está suficientemente determinado por sus tres ángulos conocidos, pues por ellos, se conocen los tres lados de otro triangulo, que (p. 30) lo determina, y por consecuencia, queda tambien determinado el otro.

N O T A.

Se ha omitido el Lema del Autor, y en su lugar se ha substituido este del suplemental por la razon dicha en la Nota de los complementarios.

PROPOSICION XLII. PROBLEMA.

Dados los tres ángulos de un triangulo, hallar qualquier lado. (fig. 19.)

Sea el triangulo ABC en el qual se conocen los ángulos A de 49° grados 40 minutos B de 73 grados 33 minutos, y C de 76 grados, 40 minutos y se busca el lado BC.

Del Lema antecedente se colige, que dados los tres ángulos de un triangulo esferico obliquangulo, nos podremos valer para la resolucion de otro triangulo, cuyos tres lados sean suplementos de los tres ángulos del triangulo dado: lo qual se hará del modo siguiente.

Tomese los suplementos al semicirculo de los tres ángulos de triangulo dado ABC, y serán los valores de los tres lados del triangulo suplemental; sumense los tres suplementos; á la suma saquese la mitad, y se tendrá la semisuma; restense los suplementos de los ángulos B, y C adyacentes al lado BC que se busca de dicha semisuma, y se tendrán las diferencias de estos á la semisuma de los tres; y continuese la operacion como en el problema antecedente: esto es,

Suplemento al semicirculo del ángulo C= 103°20′	Comto.Arit°.Log° 0.01186

Su-

Suplemento al mismo del ángulo B$=$106° 27′. . . . . } Comto.Arit°.Log° 0.01815.

Residuo de la semisuma, y del suplemento del ángulo C$=$66° 43′ 30″ .. } 9.96313

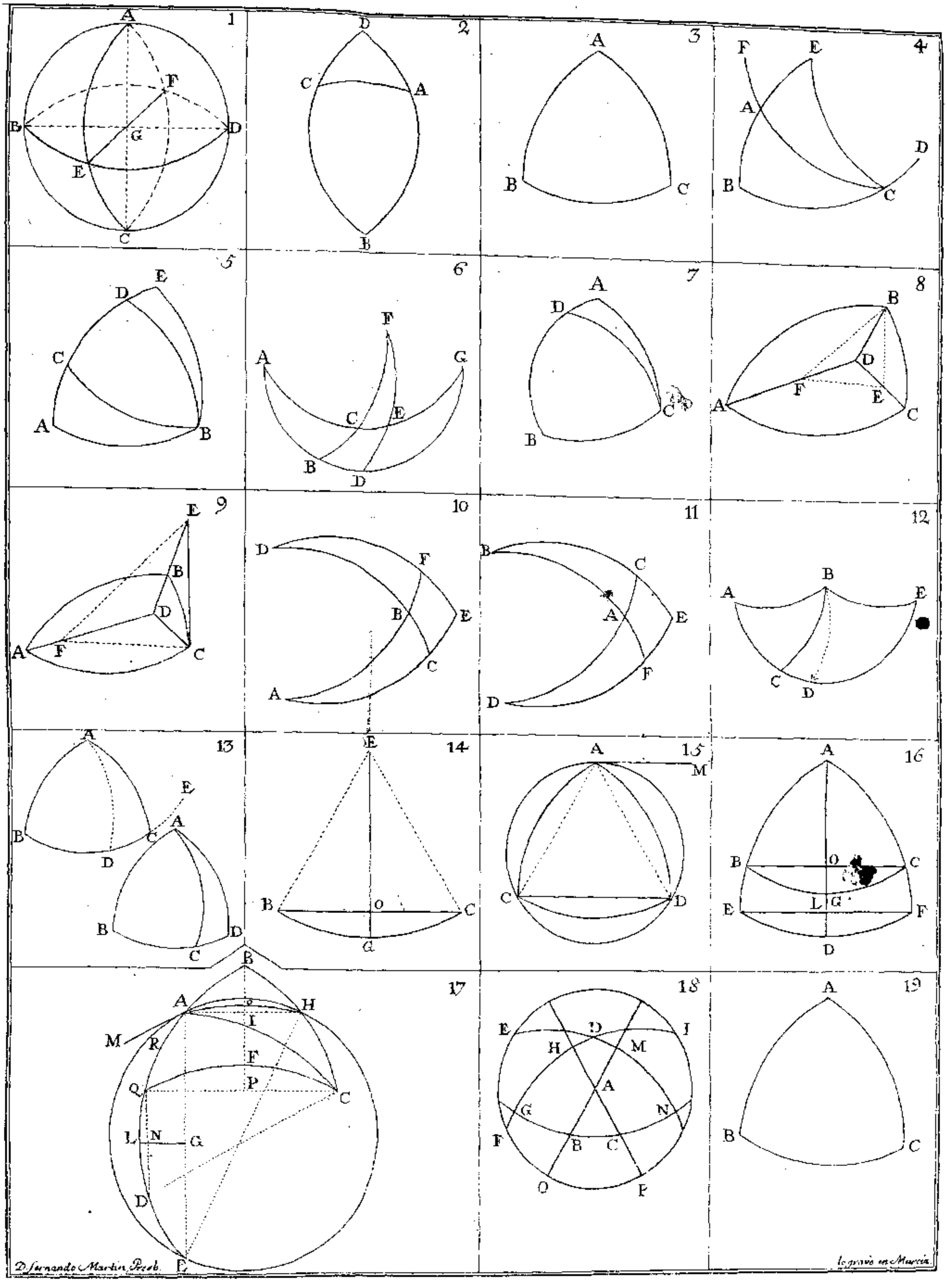
Residuo de la semisuma, y del Suplemento del ángulo B$=$63° 37′ 30″. . } 9.95226.

Suma de los quatro Logaritmos.. . . . .19.94540.

Su mitad es Logaritmo seno de 69° 54′. 9.97270.

Duplo del valor hallado 139° 48′ cuyo suplemento á 180° es el valor del lado BC que se busca, esto es BC$=$40° 12′.

F I N.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
D. Fernando Martin Presb.
lo gravó en Murcia